DS 8

L'usage de la calculatrice est autorisé. (durée : 2 heures)

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (Asie, juin 2007) : **10 points**

On désigne par a un réel strictement positif et différent de 1.

On se propose de rechercher, dans l'intervalle]0 ; +∞[, les solutions de l'équation E_a : $x^a = a^x$

I Étude de quelques cas particuliers

1. Vérifier que les nombres 2 et 4 sont solutions de l'équation E_2.

2. Vérifier que le nombre a est toujours solution de l'équation E_a.

3. On se propose de démontrer que e est la seule solution de l'équation E_e.

On note h la fonction définie sur l'intervalle]0 ; +∞[par $h(x) = x - e\ln x$.

a. Question de cours : On rappelle que lorsque t tend vers +∞, alors $\frac{e^t}{t}$ tend vers +∞.

Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

b. Déterminer les limites de h en 0 et +∞.

c. Étudier les variations de h sur l'intervalle]0 ; +∞[.

d. Dresser le tableau des variations de h et conclure quant aux solutions de l'équation E_e.

II Résolution de l'équation E_a

1. Soit x un réel strictement positif. Montrer que x est solution de l'équation E_a si et seulement si x est solution de l'équation : $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln a}{a}$

2. On considère la fonction f définie sur l'intervalle]0 ; +∞[par : $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

a. Déterminer les limites de f en 0 et +∞. Donner une interprétation graphique de ces deux limites.

b. Étudier les variations de f sur l'intervalle]0 ; +∞[.

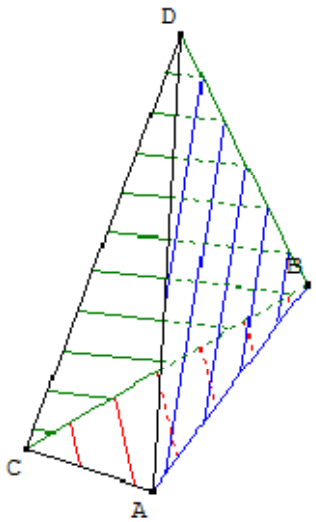
c. Dresser le tableau des variations de la fonction f.

Question hors barème : 3. Justifier à l'aide des résultats précédents les propositions ($P1$) et ($P2$) suivantes :

($P1$) : si $a \in$]0 ; 1], alors E_a admet l'unique solution a ;

($P2$) : si $a \in$]1 ; e[∪]e ; +∞[, alors E_a admet deux solutions a et b, l'une appartenant à l'intervalle]1 ; e[et l'autre appartenant à l'intervalle]e ; +∞[.

Exercice 2 : 10 points



$(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormal de l'espace d'unité 1 cm.

A, B, C et D sont quatre points tels que A(–1 ;2 ;4), B(1 ;1 ;3), C(–1 ;3 ;3) et D(3 ;3 ;5).

a. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

b. Démontrer que la droite (BD) est orthogonale au plan (ABC).

c. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

d. Déterminer une équation du plan (ACD).

e. Déterminer la distance du point B au plan (ACD).

f. En déduire l'aire du triangle ACD.

g. Q est le plan d'équation : 3x + y –2z + 1 = 0. Les plans Q et (ACD) sont-ils sécants ? Perpendiculaires ?