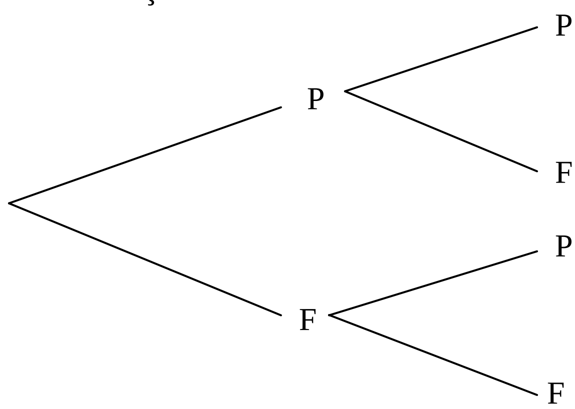
Probabilités conditionnelles

I.Rappels

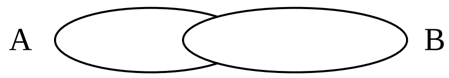
Définition : Soit une expérience aléatoire.
On appelle éventualité ou événement élémentaire tout résultat possible de cette expérience.
On appelle univers l'ensemble de toutes les éventualités.
On appelle événement tout ensemble composé d'éventualités (ce sont des sous-ensembles de l'univers).
On appelle événement impossible, et on note $\emptyset$, l'événement qui ne contient aucune éventualité.

Exemple : On lance deux pièces équilibrées, l'une après l'autre. Chaque pièce peut tomber soit sur pile (P) soit sur face (F). Univers : $\Omega = \{ (P,P) ;(P ,F) ;(F,P) ;(F,F) \}$
On peut l'obtenir en traçant un arbre :

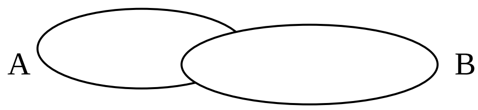


(P,P) est une éventualité.
L'événement A : « Les deux pièces tombent du même côté » est = { (P,P) ;(F,F) }

Rappel : $A \cap B$ est l'intersection des événements A et B c'est à dire l'ensemble des éléments appartenant à la fois à A et à B.



$A \cup B$ est l'union de A et B c'est à dire l'ensemble des éléments appartenant soit à A soit à B (ou aux deux).



Définition : 2 événements A et B d'un univers Ω sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.
2 événements A et B d'un univers Ω sont contraires si $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$. On note $B = \overline{A}$.

Exemple : A = {(P,P)} B = {(F,F) ; (P,F)} C = {(F,P) ;(P,P)}
A et B sont incompatibles. A et C ne sont pas incompatibles. B et C sont contraires donc $B = \overline{C}$

Définition : $\Omega = \{e_1, e_2, . . . , e_n\}$ un univers. Définir une loi de probabilité p sur Ω consiste à associer à chaque éventualité e_i de Ω un nombre $p(e_i)$ compris entre 0 et 1. La somme des $p(e_i) = 1$.
Si A et B sont deux événements incompatibles de Ω alors $p (A \cup B) = p(A) + p (B)$.

Exemple : $p (\{(F,F)\}) = \frac{1}{4}$ $\quad p (\{(F,F) ;(F,P)\}) = p (\{(F,F)\}) + p (\{(F,P)\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Propriété : Ω est l'univers.
* $p (\Omega) = 1$ et $p (\emptyset) = 0$
* Pour tout événement A, $p (\overline{A}) = 1 – p (A)$
* Si $A \subset B$ alors $p (A) \leq p (B)$

* A et B sont des événements quelconques de Ω. Alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Définition : Soit Ω un univers. $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. p est une loi de probabilité définie sur Ω. On dit qu'il y a équiprobabilité si les probabilités de chaque éventualité sont les mêmes c'est à dire si $p(e_1) = p(e_2) = \ldots = p(e_n)$. Dans ce cas, s'il y a n éventualités $p(e_i) = \frac{1}{n}$ et si A est un événement $p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$

II. Variables aléatoires

Définition : Soit Ω un univers. Une variable aléatoire X est une fonction qui associe, à toute éventualité de Ω, un nombre réel.
Elle permet de définir **sur $\mathbb{R}$** (et non sur Ω) une nouvelle probabilité p_X.
Exemple : On jette un dé équilibré à 6 faces. Si on obtient 1 nombre pair on gagne 10 €, si on obtient la face 1 ou la face 3 on gagne 15 €, si on obtient la face 5 on pert 60 €.
X est la variable aléatoire qui correspond au gain algébrique (éventuellement négatif) de joueur.X peut prendre les valeurs –60 ;10 et 15.

x_i	-60	10	15
$p(X = x_i) = p_X(x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

$p(X = -60) = p_X(-60)$ = probabilité que le gain algébrique soit de – 60 (c'est à dire que l'on obtiennne la face 5)
Définition : L'espérance mathématique de X est :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p(X = x_i)\, x_i = x_1\, p(X = x_1) + \ldots + x_n\, p(X = x_n).$$

Exemple : Ici : $E(X) = -60 \times \frac{1}{6} + 10 \times \frac{1}{2} + 15 \times \frac{1}{3} = 0$
Ceci signifie que si l'on joue un très grand nombre de parties, à chaque partie, en moyenne, on peut espérer gagner 0 €.

Définition : La variance de X est $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p(X = x_i)\,[x_i - E(X)]^2$

L'écart type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$
Ils permettent de mesurer la dispersion des résultats. Plus $\sigma(X)$ (et donc V(X)) est grand, plus les résultats sont loin de la moyenne.

Activité : Dans une réunion, 30 % des participants sont des femmes et 70 % sont des hommes. 40 % des femmes présentes ont moins de 30 ans et 60 % des hommes présents ont moins de 30 ans.
On choisit une personne au hasard. On suppose que chaque personne a la même probabilité d'être choisie. Soient les événements :
A : « La personne choisie a moins de 30 ans. »
B : « La personne choisie est une femme. »

1. Calculer p(A), p(B) et $p(A \cap B)$.
2. On choisit une personne parmi les femmes. Qu'elle est la probabilité qu'elle ait moins de 30 ans ? On note cet événement $p_B(A)$.
3. Comparer $p_B(A)$ et $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Construire un arbre schématisant cet exercice.
4. Calculer la probabilité que la personne choisie soit une femme sachant qu'elle a moins de 30 ans.